Curriculum vitae

Alessandro Iacopetti

Istruzione e formazione:

- Dottorato di Ricerca in Matematica, Università di Roma Tre, conseguito in data 09/04/2015.
  Titolo della tesi: “Sign-changing solutions of the Brezis–Nirenberg problem: asymptotics and existence results”.
  Relatore: Prof.ssa Filomena Pacella.
- Laurea specialistica in Matematica, Università di Pisa, conseguita in data 28/03/2008. Voto: 110/110 con lode.
  Titolo della tesi: “Sistemi ellittici totalmente nonlineari del secondo ordine”. Relatore: Prof. Antonio Tarsia.

Posizioni accademiche ricoperte e riconoscimenti:

- Abilitazione Scientifica Nazionale a Professore di seconda fascia nel settore 01/A3 Analisi Matematica, Probabilità e Statistica Matematica, a partire dal 31/01/2022.
- Ricercatore di Tipo B presso l’Università di Torino, a partire da Luglio 2021.
- Ricercatore di Tipo A presso l’Università degli Studi di Milano, Ottobre 2020-Giugno 2021.
- Titolare di una posizione triennale come “Chargé de Recherches” (Research Assistant), finanziata da F.R.S.-FNRS (Fonds de la Recherche Scientifique-Belgium). Istituzione scelta per svolgere l’attività di ricerca: Université Libre de Bruxelles, Febbraio 2020-Settembre 2020.
- Assegnista di ricerca presso l’Università di Roma “La Sapienza”, Febbraio 2019-Gennaio 2020.
- Post-Doc presso l’Université Libre de Bruxelles, Luglio 2017-Giugno 2018.
- Assegnista di ricerca presso l’Università di Torino, Maggio 2015-Giugno 2017.
- Assegnista di ricerca presso l’Università di Roma “La Sapienza”, Aprile 2015-Maggio 2015.

Campi di ricerca:

Analisi Geometrica, Equazioni differenziali nonlineari , Calcolo delle Variazioni, Teoria della Regolarità.

Attività didattica:

- Co-titolare del corso di dottorato intitolato ”Geometrical Aspects of PDEs” (primo semestre a.a. 2023/2024).
- Co-titolare del corso di dottorato intitolato ”Geometrical Aspects of PDEs II” (secondo semestre a.a. 2023/2024).
- Co-titolare dell’insegnamento “Metodi Variazionali” per il corso di Laurea magistrale in Matematica, Università degli Studi di Torino (secondo semestre a.a. 2022/2023 e 2023/2024).
- Co-titolare dell’insegnamento “Mathematics for Economics II” per il corso di Laurea triennale in Economia, Università degli Studi di Torino (primo semestre a.a. 2023/2024).
- Co-titolare dell’insegnamento “Analisi 2” per il corso di Laurea triennale in Matematica, Università degli Studi di Torino (primo semestre a.a. 2022/2023 e 2023/2024).

- Co-titolare dell'insegnamento "Analisi 2" per il corso di Laurea triennale in Fisica, Università degli Studi di Torino (secondo semestre a.a. 2021/2022, a.a 2022/2023, a.a. 2023/2024).
- Co-titolare del corso di dottorato, intitolato "Alcune generalizzazioni del teorema di Reifenberg e applicazioni ai problemi di frontiera libera" (secondo semestre a.a. 2022/2023).
- Responsabile del corso di esercitazioni per l'insegnamento "Analisi 1 B" per il corso di laurea in Matematica, Università degli Studi di Torino (secondo semestre a.a. 2021/2022).
- Responsabile del corso di esercitazioni per l'insegnamento "Analisi I" per il corso di laurea in Matematica per la finanza e l'assicurazione, Università degli Studi di Torino (primo semestre a.a. 2021/2022).
- Responsabile del corso di esercitazioni per l'insegnamento "Analisi II" per il corso di laurea in Fisica, Università degli Studi di Milano (secondo semestre a.a. 2020/2021).
- Supervisore di una parte della tesi di Dottorato del Dr. G. Cora (Univ. di Torino), nel periodo Febbraio 2016–Giugno 2017.
- Ciclo di lezioni (per un totale di 6 ore) sul problema di Brezis-Nirenberg frazionario, pianificato per un gruppo di studio sui problemi differenziali non-locali organizzato dalla Prof.ssa S. Terracini e rivolto a studenti di dottorato e postdocs, Ottobre 2015-Gennaio 2016.
- Responsabile del corso di esercitazioni per l'insegnamento "Analisi Matematica II" per il corso di laurea in Fisica, primo semestre dell'anno accademico 2014/2015, Università di Roma Tre.
- Docente di Matematica e Fisica presso l'Istituto superiore "G.G. Byron" di Lucca, Febbraio 2009–Luglio 2011.

Finanziamenti:

- Il progetto PRIN-2022 intitolato "NO^3 - Nodal Optimization, NOnlinear elliptic equations, NOnlocal geometric problems, with a focus on regularity", del quale sono responsabile dell'Unità locale di Torino è stato finanziato, coordinatore del progetto: Prof. N. Soave.
- Il progetto GNAMPA 2023 intitolato "Equazioni nonlineari e problemi di tipo Calabi-Bernstein" è stato finanziato da GNAMPA-INDAM, coordinatore del progetto: Prof. G. M Bisci.
- Il progetto di ricerca intitolato "Gamma-convergenza e rilassamento in problemi variazionali nonlocali e degeneri/singolari, ed applicazioni" è stato finanziato da GNAMPA-INDAM, coordinatore del progetto: Dr. G. Cora.
- Il progetto di ricerca intitolato "Nonlinear Partial Differential Equations arising in Geometry and Applied sciences" è stato finanziato dall'Università di Roma "La Sapienza". Coordinatore del progetto: Prof.ssa F. Pacella.
- Ad integrazione della posizione di Chargé de Recherches, ho ottenuto un finanziamento da parte di F.R.S.-FNRS per un ammontare di 15.000 euro per svolgere missioni durante il periodo 01/02/2020–31/01/2023.
- Il progetto di ricerca "The Born-Infeld electrostatic model: existence, regularity and multiplicity of solution" è stato finanziato da GNAMPA-INDAM, coordinatore del progetto: Prof.ssa F. Colasuonno.
- Membro Junior dell'advanced ERC grant n. 339958 "Complex Patterns for Strongly Interacting Dynamical Systems - COMPAT", il cui principal investigator è la Prof.ssa S. Terracini.

Conferenze su invito a congressi internazionali:

- "Two nonlinear days in Urbino 2023", Urbino (6-7 Luglio 2023).

- “Geometric and Analytical Aspects of Nonlinear Elliptic Equations and Related Evolution Problems”, Oaxaca (CMO), Mexico (10-15 Maggio 2020) [rinviata].
- “Intensive Week of PDEs@Cogne”, Cogne (2-7 Giugno 2019)
- “Partial Differential Equations in Analysis and Mathematical Physics”, Cagliari (30 Maggio-1 Giugno 2019).
- “Nonlinear Analysis and PDEs in Caserta”, Università degli Studi della Campania “L. Vanvitelli”, Caserta (10-14 Settembre 2018).
- “Topics in nonlinear analysis and applications”, Università Milano “Bicocca”, Milano (15-16 Marzo 2017).
- “Roma Caput PDE”, Università “La Sapienza”, Roma (23-26 Gennaio 2017).
- “PDEs at the Grand Paradis”, Cogne (20-24 Giugno, 2016).
- “Bruxelles-Torino talks in PDEs”, Torino, (2-5 Maggio 2016).

Seminari su invito presso Università:

- Seminario presso il Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management, Politecnico di Bari (2 Marzo 2023).
- Seminario presso il Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, Università “La Sapienza”, Roma (7 Febbraio 2022).
- Seminario (in modalità remota) presso il Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (9 Marzo 2021).
- Seminario (in modalità remota) presso il Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, Università di Roma “La Sapienza” (12 Novembre 2020).
- Seminario presso il Dipartimento di Matematica “G. Peano”, Università degli Studi di Torino, Torino (09 Dicembre 2019).
- Seminario presso il Dipartimento di Matematica “F. Enriques”, Università degli Studi di Milano, Milano (20 Novembre 2019).
- Seminario presso il Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, Università “La Sapienza”, Roma (3 Ottobre 2019).
- Seminario presso il Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”, Università “La Sapienza”, Roma (4 Febbraio 2016).

Comunicazioni brevi:

- “Nonlinear Analysis in Rome”, University of Notre Dame Rome (26-30 Giugno 2017).
- “International Conference on Elliptic and Parabolic Problems”, invitato per la sessione speciale MS 11: Theory and methods in nonlinear analysis, Gaeta (Italia), (22-26 Maggio 2017).
- “The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications”, invitato per la sessione speciale SS52: Function Spaces and Inequalities, Orlando, Florida (USA) (1-5 Luglio, 2016).
- “9th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems”, Gaeta (Italia), (23-27 Maggio 2016).
- “Two- Day Meeting in Honor of Antonio Ambrosetti”, Venezia, Istituto Canossiano Le Romite (Dicembre 2014).

Conferenze divulgative:

- Seminario intitolato “La Matematica delle bolle di sapone: introduzione ai principi di minimo in natura”, 29 Giugno 2023, Torino. Il seminario è stato parte di un’attività che ho realizzato all’interno della summer school ”Essenziale straordinaria acqua. Indagine con l’ausilio della scienza” rivolta a studenti delle scuole superiori, e tenutasi a Torino nel periodo 27-30 Giugno 2023.

Organizzazione conferenze:

- Membro del comitato organizzatore del workshop "Regularity and geometric aspects of nonlinear PDEs", http://www.velichkov.it/workshop-NonlinearPDEs.html, Pisa, (31 Gennaio - 2 Febbraio 2024).
- Membro del comitato organizzatore della conferenza "PDEs in Cogne: a friendly meeting in the snow", https://sites.google.com/uniroma1.it/pde23cogne/home, Cogne (Italia), (09-13 Gennaio 2023).

Periodi di visita:

- Université Libre de Bruxelles, invitato dal Prof. Denis Bonheure, 3-6 Maggio 2023.
- Politecnico di Bari, invitato dal Prof. A. Pomponio 26 Febbraio 2023–3 Marzo 2023.
- Università di Roma "La Sapienza", invitato dalla Prof.ssa Filomena Pacella, 7–11 Febbraio 2022.
- Università di Torino, invitato dal Prof. Paolo Caldiroli, 11–18 Maggio 2018, 3–28 Settembre 2018, 9–12 Dicembre 2019.
- Université Libre de Bruxelles, invitato dal Prof. Denis Bonheure, 13-18 Novembre 2016.

Pubblicazioni:

(19) P. Caldiroli, G. Cora, A. Iacopetti, *Annular type surfaces with fixed boundary and with prescribed, almost constant mean curvature*, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA (accettato per la pubblicazione).

(18) D. G. Afonso, A. Iacopetti, F. Pacella, *Energy stability for a class of semilinear elliptic problems*, The Journal of Geometric Analysis (accettato per la pubblicazione).

(17) D. G. Afonso, A. Iacopetti, F. Pacella, *Overdetermined problems and relative cheeger sets in unbounded domains*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni 34, 531–546 (2023).

(16) D. Bonheure, A. Iacopetti, *A sharp gradient estimate and $W^{2,q}$ regularity for the prescribed mean curvature equation in the Lorentz-Minkowski space*, Arch. Ration. Mech. Anal. 247, 87 (2023).

(15) A. Iacopetti, F. Pacella, T. Weth, *Existence of nonradial domains for overdetermined and isoperimetric problems in nonconvex cones*, Arch. Ration. Mech. Anal. 245, 1005–1058 (2022).

(14) P. Caldiroli, A. Iacopetti, M. Musso, *On the non-existence of compact surfaces of genus one with prescribed, almost constant mean curvature, close to the singular limit*, Advances in Differential Equations), Vol. 27, Numbers 3-4, 193–252 (2022).

(13) G. Galise, A. Iacopetti, F. Leoni, *Liouville-type results in exterior domains for radial solutions of fully nonlinear equations*, Journal of Differential Equations, Vol. 269, Issue 6, 5034–5061 (2020).

(12) G. Galise, A. Iacopetti, F. Leoni, F. Pacella, *New concentration phenomena for a class of radial fully nonlinear equations*, Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire, Vol. 37, Issue 5, 1109–1141 (2020).

(11) G. Cora, A. Iacopetti, *Sign-changing bubble-tower solutions to fractional semilinear elliptic problems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-A, Vol. 39, No. 10, 6149–6173 (2019).

(10) D. Bonheure, A. Iacopetti, *Spacelike radial graphs of prescribed mean curvature in the Lorentz-Minkowski space*, Analysis & PDE, Vol. 12, No. 7, 1805-1842 (2019).

(9) D. Bonheure, A. Iacopetti, *On the regularity of the minimizer of the electrostatic Born-Infeld energy*, Arch. Ration. Mech. Anal. 232, 697–725 (2019).
(8) G. Cora, A. Iacopetti, *On the structure of the nodal set and asymptotics of least energy sign-changing radial solutions of the fractional Brezis-Nirenberg problem*, Nonlinear Analysis 176, 226–271 (2018).
(7) P. Caldiroli, A. Iacopetti, *Existence of isovolumetric $\mathbb{S}^2$-type stationary surfaces for capillarity functionals*, Revista Matemàtica Iberoamericana 34, no. 4, 1685–1709 (2018).
(6) A. Iacopetti, G. Vaira, *Sign-changing blowing-up solutions for the Brezis–Nirenberg problem in dimensions four and five*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XVIII, Issue 1, 1–38 (2018).
(5) P. Caldiroli, A. Iacopetti, *Existence of stable H-surfaces in cones and their representation as radial graphs*, Calculus of Variations and PDE's (2016), 55: 131.
(4) A. Iacopetti, G. Vaira, *Sign-changing tower of bubbles for the Brezis-Nirenberg problem*, Commun. Contemp. Math., **18** (2016), 1550036.
(3) A. Iacopetti, F. Pacella, *Asymptotic analysis for radial sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem in low dimensions*, Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl., Springer, Vol. 86, 325–343 (2015).
(2) A. Iacopetti, F. Pacella, *A nonexistence result for sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem in low dimensions*, Journal of Differential Equations, 258 no. 12, 4180–4208 (2015).
(1) A. Iacopetti, *Asymptotic analysis for radial sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem,* Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 194 Issue 6, 1649–1682 (2015).

Tesi di Dottorato:

(1) A. Iacopetti, PhD thesis "Sign-changing solutions of the Brezis–Nirenberg problem: asymptotics and existence results", http://www.matfis.uniroma3.it/dottorato/tesi.php?dottorato=matematica

Dati bibliometrici (banca dati di riferimento Scopus):

- Totale citazioni: 97
- H-index: 6

Attività scientifica.

L'ambito della mia attività di ricerca è quello dell'Analisi non lineare, con applicazione a questioni connesse alle Equazioni alle derivate parziali, al Calcolo delle variazioni, e alla Geometria differenziale. Una breve descrizione dei temi affrontati è la seguente:

Analisi Geometrica e Calcolo delle Variazioni.
Per quanto concerne l'Analisi Geometrica ed il Calcolo delle Variazioni, mi sono occupato del problema dell'ostacolo per H-superfici in coni, della loro rappresentazione globale come grafico radiale, e dell'esistenza di punti critici di tipo sella vincolati al volume per funzionali di tipo capillarità, con applicazioni al relativo problema isoperimetrico e al problema delle H-bolle (si vedano i lavori (5) e (7), scritti in collaborazione con il Prof. P. Caldiroli).

Successivamente ho studiato il problema di Plateau per grafici radiali di curvatura media prescritta nello spazio di Lorentz-Minkowski che si appoggiano su domini limitati dello spazio iperbolico, determinando condizioni geometriche sul dominio, ed analitiche sulla funzione di curvatura media assegnata, tali da garantire esistenza ed unicità di soluzione per il problema.

In seguito ho investigato invece la regolarità $C^{1,\alpha}$-locale del minimo dell'energia elettrostatica di Born-Infeld quando la distribuzione di carica assegnata appartiene ad L^p. In particolare, in un recente lavoro (si veda la pubblicazione (16)) ho dimostrato che se la distribuzione è in $L^p(\mathbb{R}^N)$, con $p > N$, allora il minimo dell'energia è in $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, ed è soluzione debole per la PDE corrispondente, la quale è governata dall'operatore di curvatura media (per ipersuperfici di tipo spazio) nello spazio di Lorentz-Minkowski. In questo modo abbiamo ottenuto il primo risultato di esistenza (e regolarità) per ipersuperfici aventi curvatura media prescritta non radiale e non limitata (si vedano i lavori (9), (10) e (16), in collaborazione con il Prof. D. Bonheure).

Nell'articolo (14) (scritto in collaborazione con il Prof. P. Caldiroli e la Prof.ssa M. Musso) abbiamo provato la non esistenza di superfici regolari compatte di genere 1 che sono grafici normali di tori di Delaunay e aventi curvatura media prescritta H, dove $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ appartiene ad una classe notevole di funzioni vicine ad una costante all'infinito (per maggiori dettagli si veda (14) nella sezione pubblicazioni). Nel recente lavoro (si veda la pubblicazione (19)), in collaborazione con il Prof. P. Caldiroli ed il Dott. G. Cora abbiamo stabilito risultati di esistenza e di non esistenza per superfici anulari che si appoggiano su due circonferenze coassiali e dello stesso raggio, caratterizzate come grafici normali di sezioni finite di superfici di Delaunay, e aventi curvatura media prescritta vicina ad una costante (per maggiori dettagli si veda si veda (19)).

Nel lavoro [(15) sez. pubblicazioni], scritto in collaborazione con la Prof.ssa F. Pacella ed il Prof. T. Weth abbiamo studiato il seguente problema sovradeterminato classico: sia $\Sigma_D \subset \mathbb{R}^N$ il cono generato da un dominio regolare $D \subset \mathbb{S}^{N-1}$ e sia $\Omega \subset \Sigma_D$ un dominio, posto

$$\Gamma_\Omega := \partial\Omega \cap \Sigma_D,\ \Gamma_{1,\Omega} := \partial\Omega \cap \partial\Sigma_D$$

e supponendo che $\mathcal{H}_{N-1}(\Gamma_{1,\Omega}) > 0$, dove $\mathcal{H}_{N-1}(\cdot)$ denota la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale, consideriamo

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Gamma_{1,\Omega} \setminus \{0\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -c < 0 & \text{on } \Gamma_\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dove $c > 0$ è una costante, e ν è la normale esterna.

I domini $\Omega \subset \Sigma_D$ per i quali (1) ha soluzione corrispondono ai punti critici (con vincolo di volume fissato) dell'energia di torsione relativa al cono $\mathcal{E}(\Omega; \Sigma_D)$. In questo lavoro abbiamo considerato il caso di coni non convessi, largamente inesplorato in letteratura, dimostrando che se $D \subset \mathbb{S}^{N-1}$ è tale che

$$\lambda_1(D) < N - 1,$$

dove $\lambda_1(D)$ denota il primo autovalore non banale di $-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ con condizione di Neumann omogenea sul bordo, allora se $\Omega^* \subset \Sigma_D$ è un dominio che minimizza $\mathcal{E}(\Omega; \Sigma_D)$, con vincolo di volume, si ha che Ω^* non può essere un settore sferico. Ricordiamo che nel caso in cui D sia convesso, ovvero Σ_D è un cono convesso in $\mathbb{R}^N$, è ben noto che gli unici punti critici dell'energia di torsione sono dati da settori sferici centrati nell'origine o semi-palle attaccate ad una parte piatta del bordo del cono, inoltre si ha $\lambda_1(D) \geq N-1$.

Per quanto concerne l'esistenza di minimi vincolati al volume per $\mathcal{E}(\Omega; \Sigma_D)$, abbiamo dimostrato che essi esistono sempre se $\mathcal{H}_{N-1}(D) < \mathcal{H}_{N-1}(\mathbb{S}^{N-1}_+)$, dove $\mathbb{S}^{N-1}_+$ indica una semisfera. In particolare, se D verifica le condizioni $\lambda_1(D) < N-1$, $\mathcal{H}_{N-1}(D) < \mathcal{H}_{N-1}(\mathbb{S}^{N-1}_+)$

allora tale minimo non può essere un settore sferico. Nel medesimo articolo è stato ottenuto un risultato analogo anche per il problema isoperimetrico relativo al cono. Infine abbiamo fornito, in appendice, esempi espliciti di domini $D \subset \mathbb{S}^{N-1}$ che verificano le condizioni sopra menzionate.

Nel successivo lavoro, si veda (16), abbiamo studiato problemi parzialmente sovradeterminati nel caso in cui il contenitore è un semicilindro $\mathcal{C}_\omega \subset \mathbb{R}^N$ generato da un dominio regolare $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$, ovvero, senza perdita di generalità

$$\mathcal{C}_\omega = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N;\ x' \in \omega,\ x_N \in (0, +\infty)\}.$$

Sia $\Omega \subset \mathcal{C}_\omega$ un dominio, e si ponga $\Gamma_\Omega := \partial\Omega \cap \mathcal{C}_\omega$, $\Gamma_{1,\Omega} := \partial\Omega \cap \partial\mathcal{C}_\omega$ e supponiamo che $\mathcal{H}_{N-1}(\Gamma_{1,\Omega}) > 0$. Consideriamo il seguente:

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{on } \Gamma_\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 & \text{on } \Gamma_{1,\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= -c < 0 & \text{on } \Gamma_\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

In questo lavoro abbiamo introdotto la nozione di insieme self-Cheeger relativo ad un contenitore generico $\mathcal{C}$, ovvero abbiamo definito la costante di Cheeger relativa a $\mathcal{C}$ come

$$h_{\mathcal{C}}(\Omega) := \inf_{E \subseteq \Omega} \frac{P_{\mathcal{C}}(E)}{|E|},$$

dove $P_{\mathcal{C}}(E)$ denota il perimetro relativo di E. Gli insiemi $E \subseteq \Omega$ che realizzano il minimo sono detti i Cheeger sets di Ω (relativi a $\mathcal{C}$). Inoltre se Ω è esso stesso un Cheeeger set allora diciamo che Ω è un *self-Cheeger* set. In [(3), sez. preprints] abbiamo provato che se $\mathcal{C}_\omega$ è convesso allora ogni dominio $\Omega \subset \mathcal{C}_\omega$ per il quale esiste una soluzione di (2) è un self-Cheeger set.

Inoltre, sempre in (16), abbiamo considerato il caso particolare in cui $\Omega = \Omega_\varphi$ è il sottografico di una funzione regolare positiva $\varphi : \overline{\omega} \to \mathbb{R}^+$ fornendo diversi contributi per il problema dei Cheeger sets relativi, e provando che se la curvatura media di $\Gamma_{\Omega_\varphi} = \partial\Omega_\varphi \cap \mathcal{C}_\omega$ è costante e Γ_{Ω_φ} interseca ortgonalmente il semi-cilindro $\mathcal{C}_\omega$ allora φ deve essere costante e la curvatura media di Γ_φ è nulla.

Nel recente contributo (si veda la pubblicazione (18)) abbiamo studiato il seguente problema: dato un dominio uniformemente Lipschitziano illimitato $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ ed un dominio limitato $\Omega \subset \mathcal{C}$ con bordo relativo $\Gamma_\Omega = \partial\Omega \cap \mathcal{C}$ regolare, posto $\Gamma_{1,\Omega} := \partial\Omega \cap \partial\mathcal{C}$, e supponendo che $\mathcal{H}_{N-1}(\Gamma_{1,\Omega}) > 0$, si consideri il seguente problema ellittico semilineare

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma_{1,\Omega}, \end{cases} \tag{3}$$

dove $f \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$, e ν è la normale esterna a $\partial\Omega$.

Questo problema ha natura variazionale, infatti le soluzioni deboli di (3), nello spazio di Sobolev $H^1_0(\Omega \cup \Gamma_{1,\Omega})$ delle funzioni in $H^1(\Omega)$ che hanno traccia nulla su Γ_Ω, corrispondono ai punti critici del funzionale $J : H^1_0(\Omega \cup \Gamma_{1,\Omega}) \to \mathbb{R}$ definito da

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx,$$

dove F è una primitiva di f.

Se $f \equiv 1$, data la stretta convessità del funzionale J, possiamo associare in modo univoco ad ogni dominio Ω il minimo $u \in H^1_0(\Omega \cup \Gamma_{1,\Omega})$ di J che è quindi l'unica soluzione debole di (3). Questo permette di definire una funzione $\Omega \mapsto J(\Omega)$, detta *torsione* (relativa a $\mathcal{C}$). Di converso, se f è una nonlinearità qualsiasi non possiamo associare, in generale, in modo univoco ad un dominio la sua energia, dato che (3) non ha soluzione unica.

Tuttavia, se u_Ω è una soluzione positiva e non degenere di (1), considerando deformazioni di Ω tramite una famiglia di diffeomorfismi ξ_t associati ad un campo vettoriale V che non deforma il bordo del contenitore $\partial\mathcal{C}$, allora, ponendo $\Omega_t := \xi_t(\Omega)$, $\Gamma_t := \Gamma_{\Omega_t}$ $\Gamma_{1,t} := \Gamma_{1,\Omega_t}$ riusciamo a provare che per t sufficientemente piccolo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega_t, \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_t, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma_{1,t}, \end{cases}$$

ha soluzione unica u_t in un intorno di u_Ω. Possiamo allora definire l'energia di Ω_t come $T(\Omega_t) = J(u_t)$ e nel caso di deformazioni che preservano il volume di Ω diciamo che la coppia (Ω, u_Ω) è stazionaria per l'energia se

$$\frac{d}{dt}[T(\Omega_t)]|_{t=0} = 0$$

per ogni famiglia di diffeomorfismi ξ_t come sopra e tale che ξ_t preserva il volume.

Lo scopo principale di [(18)] è stato quello di formalizzare i concetti sopra esposti ed in particolare ottenere risultati di stabilità ed instabilità per la coppia (Ω, u_Ω).

Per la precisione, abbiamo analizzato i casi in cui $\mathcal{C} = \Sigma_D$ è un cono generato da un dominio regolare $D \subset \mathbb{S}^{N-1}$, $\Omega_D = \Sigma_D \cap B_1(0)$ settore sferico e u_{Ω_D} è a simmetria radiale, oppure $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\omega = \omega \times]0, +\infty[$ è un semi-cilindro generato da un dominio regolare ω di $\mathbb{R}^{N-1}$, $\Omega_\omega = \mathcal{C}_\omega \cap \{x_N < 1\}$ e u_ω è una soluzione unidimensionale, che dipende solo dalla variabile x_N.

Nel caso del cono Σ_D abbiamo determinato una soglia per la stabilità/instabilità che dipende solo dalla dimensione e dal primo autovalore $\lambda_1(D)$ non banale dell'operatore di Laplace-Beltrami $-\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ con condizione di Neumann omogenea sul bordo su D, e dall'autovalore $\lambda_1(\omega)$ per $-\Delta_{\mathbb{R}^{N-1}}$ con condizione di Neumann omogenea sul bordo su ω (nel caso del semi-cilindro). Per la precisione si ha stabilità/instabilità di (Ω_D, u_{Ω_D}) a seconda che, rispettivamente, $\lambda_1(D) > N - 1$ oppure $\hat{\nu_1} < \lambda_1(D) < N - 1$, dove $\hat{\nu_1}$ è il primo autovalore di un opportuno operatore legato al problema linearizzato in u_Ω. Si osservi che la soglia per la stabilità è la stessa determinata in (15) nel caso della torsione (cioè quando $f \equiv 1$).

Di converso, nel caso del semicilindro $\mathcal{C}_\omega$ abbiamo un risultato generale di stabilità/ instabilità che dipende fortemente dalla nonlinearità f e da $\lambda_1(\omega)$. In alcuni casi notevoli (per esempio quando f è una nonlinearità del tipo Lane-Emden), il risultato ci permette di determinare una soglia (che dipende da f) tale che si ha stabilità se $\lambda_1(\omega)$ è strettamente maggiore della soglia. Nel caso della torsione si trova esplicitamente un numero positivo β, indipendente dalla dimensione, tale che se $\lambda_1(\omega) < \beta$ allora $(\Omega_\omega, u_{\Omega_\omega})$ è instabile, mentre se $\lambda_1(\omega) > \beta$ allora $(\Omega_\omega, u_{\Omega_\omega})$ è stabile.

Equazioni ellittiche nonlineari locali e non-locali.

Durante il dottorato ho studiato un problema ellittico semilineare classico, noto come "Problema di Brezis-Nirenberg". Nella relativa produzione scientifica ho fornito contributi relativi all'analisi asintotica, all'esistenza (e non esistenza) di soluzioni che cambiano segno di energia minima del tipo "tower of bubbles" (si vedano i lavori (1)-(4) e (6), realizzati in collaborazione con la Prof.ssa F. Pacella e la Prof.ssa G. Vaira).

Come supervisore di una parte della tesi di dottorato del Dott. G. Cora, ho proposto come argomento lo studio delle proprietà qualitative ed asintotiche di soluzioni nodali di energia minima di problemi ellittici semilineari governati dal Laplaciano frazionario $(-\Delta)^s$ (si vedano i lavori (8) e (11)). In particolare abbiamo provato che soluzioni nodali radiali nella palla di energia minima cambiano segno esattamente una volta, quando s è vicino a uno, fatto che non può essere ottenuto attraverso meri argomenti energetici come nel caso locale.

In (13), articolo scritto in collaborazione con la Prof.ssa F. Leoni e il Dott. G. Galise, abbiamo determinato condizioni necessarie e sufficienti, in relazione all'esponente p, per l'esistenza di soluzioni radiali positive del seguente problema ellittico totalmente non lineare

$$\begin{cases} -\mathcal{F}(D^2u) = u^p & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}, \\ u = 0 & \text{su } \partial B, \end{cases} \tag{4}$$

dove $\mathcal{F}$ è uno dei due operatori massimali di Pucci $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}$ e B è una palla di $\mathbb{R}^N$.

Infine, nel lavoro (12), abbiamo studiato i fenomeni di concentrazione per le soluzioni radiali che cambiano segno di problemi totalmente nonlineari del tipo

$$\begin{cases} -\mathcal{F}(D^2u) = |u|^{p-1}u & \text{in } B, \\ u = 0 & \text{su } \partial B, \end{cases} \tag{5}$$

quando p tende all'esponente critico per il quali tali soluzioni esistono (il quale varia a seconda che $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}$ o $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}$). In particolare, per $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}$ abbiamo provato che tale esponente critico è strettamente compreso fra p^*_- e p^*_+, dove p^*_-, p^*_+ sono gli esponenti critici per l'esistenza di soluzioni positive (radiali) di (5) quando $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}$, rispettivamente.

Inoltre, sia per $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}$ che per $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}$, i profili limite ottenuti dall'analisi asintotica delle soluzioni nodali di (5) sono completamente differenti rispetto a quelli osservati per il classico problema di Lane-Emden governato dal Laplaciano (si veda (12) per maggiori dettagli).